DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL DE POLINOMIOS

Inicialmente, **factorizar** un polinomio es descomponerlo en un producto de polinomios (factores) del menor grado posible.

$$P(x)=k\cdot(\ldots)\cdot(\ldots)\cdot(\ldots)\ \ ;\ \ k\neq 0\ \ y\ \ k\in\mathbb{R}$$

Estos factores pueden ser:

— Expresiones del tipo: $x,\ (ax\pm b)$

— Expresiones del tipo: (ax^2+bx+c), sin raíces reales.

$$\begin{array}{l|l} P(x) & Q(x) \\ \cline{2-2} R(x) & C(x) \end{array}\ ;\ P(x)=Q(x)\cdot C(x)+R(x)\ \rightarrow\ \frac{P(x)}{Q(x)}=C(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$$

Si $R(x)=0$ (DIVISIÓN EXACTA) entonces $P(x)$ es MÚLTIPLO de $Q(x)$, es decir, $P(x)$ **es divisible** por $Q(x)$ y, en tal caso, decimos que $Q(x)$ es DIVISOR de $P(x)$. Pudiendo escribirse: $P(x)=Q(x)\cdot C(x)$

POLINOMIOS IRREDUCIBLES (PRIMOS)

Sea un polinomio $P(x)\in\mathbb{R}[x]$, diremos que $P(x)$ es un polinomio irreducible si **no** puede expresarse como producto de dos polinomios de grado igual o mayor a 1.

— Son irreducibles todos los polinomios de "grado uno" (y coeficientes primos entre sí).

— Son irreducibles los polinomios de "grado dos" que no tienen raíces reales. (la ecuación $P(x)=0$ no tiene solución)

Una sola variable, sin coeficientes, también es un polinomio primo.
Un polinomio es irreducible cuando solo admite coeficientes *constantes*.
También es irreducible si no tiene ningún divisor de grado menor al suyo.

- Todo polinomio real de grado *impar* tiene, al menos, una raíz real (TEOREMA DE BOLZANO).
- Factorizar un polinomio es expresarlo como producto de polinomios irreducibles (primos).
- Un polinomio está factorizado completamente si cada factor obtenido no admite más descomposición (es primo).

Ejemplos: $(x^2+1)\ ;\ (x^4+x^3+1)\ ;\ldots$

VALOR NUMÉRICO DE UN POLINOMIO

El valor numérico de un polinomio, $P(x)$, para $x=a$, es el número que se obtiene al sustituir la x por a y efectuar las operaciones indicadas, escribiéndose $P(a)$.

$$Ejemplo:\quad P(x)=x^4+3x^3-3x^2+3x-4\ ;\ para\ x=-4$$

$$P(-4)=(-4)^4+3(-4)^3-3(-4)^2+3(-4)-4=\boxed{0}$$

TEOREMA DEL RESTO

El valor numérico de un polinomio, $P(x)$, para $x=a$, coincide con el resto de la división $P(x):(x-a)$. Es decir $P(a)=r$.

(*Luego no es necesario realizar la división completa para saber su resto*).

$$Ejemplo:\quad (x^4+3x^3-3x^2+3x-4):(x-2)$$

	+1	+3	−3	+3	−4
+2		+2	+10	+14	+34
	+1	+5	+7	17	30

$$P(2)=2^4+3\cdot 2^3-3\cdot 2^2+3\cdot 2-4$$

$$P(2)=16+24-12+6-4=\boxed{30}$$

TEOREMA DEL FACTOR

Si el polinomio $P(x)$ se anula para $x=a$, es decir, $P(a)=0$, entonces $(x-a)$ es un DIVISOR de $P(x)$. Luego EXISTE un polinomio $h(x)$ que verifica: $P(x)=h(x)\cdot(x-a)\ \Leftrightarrow\ P(a)=0$

RAÍCES O CEROS DE UN POLINOMIO

Las raíces o ceros de un polinomio son los valores que anulan el polinomio. Esto es,
Un número a se llama **raíz** o **cero** de un polinomio $P(x)$ si éste se anula al sustituir x por a, es decir, cuando $P(a)=0$.
Es obvio que las raíces de un polinomio $P(x)$ son las soluciones de la ecuación $P(x)=0$. *Resumiendo:*

— Si un polinomio $P(x)$ es divisible por $(x-a)$, el resto de la división es nulo, por tanto, $P(a)=0$

— Si a es una raíz o cero del polinomio $P(x)$, el resto de la división $P(x):(x-a)$ es cero y $(x-a)$ es divisor de $P(x)$

CRITERIO DE DIVISIBILIDAD

La condición necesaria y suficiente para que un polinomio sea divisible por $(x-a)$ es que a sea una raíz o cero del polinomio

$$(x-a)\ es\ divisor\ de\ P(x)\Leftrightarrow P(a)=0$$

Cuando los coeficientes de un polinomio $P(x)$ son números enteros, los ceros racionales, si existen, del polinomio se encuentran entre las fracciones que tienen como numerador un divisor del término independiente y como denominador un divisor del coeficiente del término de mayor grado.

Y concluimos que, si el coeficiente de mayor grado es 1, para buscar las raíces enteras del polinomio $P(x)$ **probaremos solo con los valores de a (positivos y negativos) que sean divisores del término independiente del polinomio.**

Ejemplo

Descomponer en factores el polinomio: $3x^3+2x^2-7x+2$
Los posibles ceros racionales se encuentran entre los números que tienen:

- Como numerador, los divisores de 2: $\pm 1\ ;\ \pm 2$
- Como denominador, los divisores de 3: $\pm 1\ ;\ \pm 3$

$$\pm\frac{1\ ;\ 2}{1\ ;\ 3}$$

Por tanto, probaremos con: $\pm 1\ ;\ \pm 2\ ;\ \pm\frac{1}{3}\ ;\ \pm\frac{2}{3}$

Seguidamente comprobamos que los ceros del polinomio propuesto son los números $+1\ ;\ -2\ \ y\ \ +\frac{1}{3}$

$$3x^3+2x^2-7x+2=(x-1)(x+2)(3x-1)$$

	+3	+2	−7	+2
1/3		+1	+1	−2
	+3	+3	−6	0
+1		+3	+6	
	+3	+6	0	

$$\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-1)(3x+6)$$

$$3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-1)(x+2)$$

$$(x-1)(x+2)(3x-1)$$

Nota 1: Es evidente que podríamos haber probado primero con +1 o -2, pero si lo hacemos con +1/3 llegamos al mismo resultado.

Nota 2: Podemos utilizar el Teorema del Resto para encontrar las raíces o ceros del polinomio propuesto antes de utilizar Ruffini.

Diversos métodos para factorizar polinomios

1. Sacar Factor Común
2. Sacar Factor Común por Agrupamiento
3. Diferencia de cuadrados
4. Trinomio cuadrado perfecto
5. Trinomio cuadrado perfecto por adición y sustracción
6. Trinomio de segundo grado
7. Binomios con un término común
8. Diferencia de cubos
9. Suma de cubos
10. Cuatrinomio cubo perfecto
11. Suma de potencias iguales impares
12. Diferencia de potencias iguales impares
13. Diferencia de potencias iguales pares
14. Identidades de Legendre
15. Desarrollo de un trinomio al cuadrado o al cubo
16. Sucesivas divisiones de Ruffini
17. Combinación de varios de los anteriores

Existe algunos métodos más, aunque en general, no suele ser fácil factorizar polinomios de grado mayor a dos que no se ajusten a los métodos anteriores.

Para hallar el **mínimo común múltiplo (mcm)** de varios polinomios, se descomponen en factores irreducibles. El **mcm** es el producto de los factores comunes y no comunes con mayor exponente.

Para hallar el **máximo común divisor** de varios polinomios, se descomponen en factores irreducibles. El **MCD** es el producto de los factores comunes con el menor exponente.

Podemos darnos cuenta que la factorización de un polinomio como producto de polinomios irreducibles es similar a la descomposición de un número en factores primos.

Ejemplos de descomposición factorial de polinomios

Ejemplo 1.- Sacar factor común

a) $x^4 - 5ax^2 = x^2\left(x^2 - 5a\right)$

b) $9x^2 - 3x = 3x\left(3x - 1\right)$

c) $49x^2 - 21ax + 42x^3 = 7x\left(7x - 3a + 6x^2\right)$

Ejemplo 2.- Sacar doble factor común

a) $a^2 - ab + ax - bx = a\left(a-b\right) + x\left(a-b\right) = \left(a-b\right)\left(a+x\right)$

b) $y^6 - y^4 + 2y^3 - 2y = y^4\left(y^2-1\right) + 2y\left(y^2-1\right) = y\left(y^2-1\right)\left(y^3+2\right)$

c) $3mn + mp + 3rn + rp = m\left(3n+p\right) + r\left(3n+p\right) = \left(3n+p\right)\left(m+r\right)$

Ejemplo 3.- Binomio al cuadrado

a) $x^4 + 4x + 4 = \left(x^2+2\right)^2$

b) $\dfrac{1}{4} - a + a^2 = \left(\dfrac{1}{2} - a\right)^2$

c) $20 + 20x + 5x^2 = 5\left(4 + 4x + x^2\right) = 5\left(2+x\right)^2$

Ejemplo 4.- Diferencia de cuadrados

a) $18 - 2b^2 = 2\left(9 - b^2\right) = 2\left(3+b\right)\left(3-b\right)$

b) $16y^2 - x^4 = \left(4y + x^2\right)\left(4y - x^2\right)$

c) $a^2 - \left(x-y\right)^2 = \left(a + x - y\right)\left(a - x + y\right)$

Ejemplo 5.- Diferencia de cubos

a) $125 - x^3 = \left(5-x\right)\left(25 + x^2 + 5x\right)$

b) $64a^3 - y^3 = \left(4a - y\right)\left(16a^2 + y^2 + 4ay\right)$

c) $\dfrac{x^3}{8} - 27 = \left(\dfrac{x}{2} - 3\right)\left(\dfrac{x^2}{4} + 9 + \dfrac{3x}{2}\right)$

Ejemplo 6.- Suma de cubos

a) $x^3 + 8y^3 = \left(x+2\right)\left(x^2 + 4 - 2x\right)$

b) $512 + y^3 = \left(8+y\right)\left(64 + y^2 - 8y\right)$

c) $8x^3 + 27 = \left(2x+3\right)\left(4x^2 + 9 - 6x\right)$

Ejemplo 7.- Combinados

a) $8 - 2a^2 + 4ab - 2b^2 = 2\left[4 - \left(a^2 - 2ab + b^2\right)\right] = 2\left(2+a-b\right)\left(2-a+b\right)$

b) $24y^3 - 4y^2 + 6y - 1 = 6y\left(4y^2+1\right) - \left(4y^2+1\right) = \left(4y^2+1\right)\left(6y-1\right)$

c) $9x^2 - 6xy - z^2 + y^2 = \left(3x-y\right)^2 - z^2 = \left(3x-y+z\right)\left(3x-y-z\right)$

d) $m^2 - n^2 - 2np - p^2 = m^2 - \left(n^2 + 2np + p^2\right) = \left(m+n+p\right)\left(m-n+p\right)$

e) $1 - x^6 = \left(1-x^3\right)\left(1+x^3\right) = \left(1-x\right)\left(1+x^2+x\right)\left(1+x\right)\left(1+x^2-x\right)$

f) $a^8 + 256 = a^8 + 2^8 \rightarrow$ *no se puede descomponer*

g) $x^5 + 32 = \left(x+2\right)\left(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16\right)$

h) $x^5 - 32 = \left(x-2\right)\left(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16\right)$

Ejemplo 8.- Por ecuación de 2º grado

a) $P\left(x\right) = 3x^2 + 5x - 2$

$3x^2 + 5x - 2 = 0$

$x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{6}$

$x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{49}}{6}$

$x_1 = \dfrac{-5+7}{6} = \dfrac{1}{3}$

$x_2 = \dfrac{-5-7}{6} = -2$

$P\left(x\right) = 3\left(x - \dfrac{1}{3}\right)\left(x+2\right)$

$P\left(x\right) = \left(3x-1\right)\left(x+2\right)$

Ejemplo 9.- Binomio con un término común

a) $x^2 + 4x - 21 = \left(x+7\right)\left(x-3\right)$

b) $x^2 - 13x + 40 = \left(x-8\right)\left(x-5\right)$

c) $x^2 + 9x + 18 = \left(x+6\right)\left(x+3\right)$

Ejemplo 10.- Por Ruffini sucesivamente

a) $P\left(x\right) = x^4 - 8x^3 + 11x^2 + 32x - 60$

	+1	−8	+11	+32	−60
+2		+2	−12	−2	+60
	+1	−6	−1	+30	0
−2		−2	+16	−30	
	+1	−8	+15	0	
+3		+3	−15		
	+1	−5	0		

Posibles ceros: divisores de 60

$\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm4,\ \pm5,\ \pm6,\ \pm10,\ \pm12,\ \pm15,\ \pm20,\ \pm30,\ \pm60$

$P\left(x\right) = \left(x-2\right)\left(x+2\right)\left(x-3\right)\left(x-5\right)$

b) $P\left(x\right) = x^4 + x^3 - 27x^2 - 25x + 50$

	+1	+1	−27	−25	+50
+1		+1	+2	−25	−50
	+1	+2	−25	−50	0
−2		−2	0	+50	
	+1	0	−25	0	

Posibles ceros: divisores de 50

$\pm1,\ \pm2,\ \pm5,\ \pm10,\ \pm25,\ \pm50$

$P\left(x\right) = \left(x-1\right)\left(x+2\right)\left(x^2-25\right)$

$P\left(x\right) = \left(x-1\right)\left(x+2\right)\left(x+5\right)\left(x-5\right)$