Inecuaciones

Una inecuación es una desigualdad matemática que presenta, al menos, una variable en alguno de sus miembros, por eso también se la conoce como desigualdad algebraica.

Los signos de desigualdad son: $<, \leq, >, \geq$

Los signos: $<$ y $>$ o $\leq$ y $\geq$ son de sentido contrario.

Una desigualdad es doble cuando aparecen dos signos de desigualdad en la misma expresión: $a<b<c$

Resolver una inecuación con una incógnita, digamos x, quiere decir hallar los números reales x para los cuales la desigualdad se cumple. Llamamos **conjunto solución** al conjunto de tales x, ya que habitualmente son infinitas soluciones, que se agrupan en intervalos de $\mathbb{R}$. Es decir, la solución se expresa como un subconjunto, un intervalo o gráficamente.

Las inecuaciones se clasifican:

- Por el **número de incógnitas** que contienen
  - Inecuaciones con una incógnita
  - Inecuaciones con más de una incógnita
- Por su **grado y operaciones** que aparecen en la expresión
  - Polinómicas (de 1º grado, de 2º grado, etc…)
  - Con incógnitas en el denominador (racionales)
  - Con incógnitas debajo del signo radical (irracionales)
  - Dobles (con dos signos de desigualdad)
  - Modulares o de Valor absoluto
  - Con Logaritmos, Exponenciales, …

— Varias inecuaciones, consideradas a la vez, forman un **sistema de inecuaciones**, lineales o no.

Resolver un sistema de inecuaciones es encontrar las soluciones comunes a todas ellas (la intersección de las inecuaciones).

Dos inecuaciones son equivalentes si tienen el mismo dominio de la incógnita y el mismo conjunto solución.

Para resolver una inecuación hay que despejar la incógnita y, para ello, hay que tener en cuenta las siguientes **propiedades**:

$$1)\ A<B \iff A+n<B+n \quad \textit{también}\ A-n<B-n$$
$$2)\ A<B \iff A\cdot n<B\cdot n,\ si\ n>0 \quad \textit{también}\ A/n<B/n,\ si\ n\neq 0$$
$$3)\ A<B \iff A\cdot n>B\cdot n,\ si\ n<0 \quad \textit{también}\ A/n>B/n,\ si\ n\neq 0$$

Observa que, si se multiplica por un número negativo, debe cambiarse el sentido de la desigualdad.

La notación $\{x:\ \ldots\ \}$ o $\{x/\ \ldots\ \}$ representa el conjunto de todos los números x tales que $\ldots$ es verdad. Esta notación también puede sustituirse por intervalos, utilizando los ya conocidos paréntesis para intervalos abiertos, corchetes para intervalos cerrados o combinados para semiabiertos.

Gráficamente, el punto "lleno" indica que el punto pertenece al conjunto solución, y el punto "vacío" que no pertenece.
Según la notación utilizada, significan lo mismo:

- Los **paréntesis**, los signos < o > y el punto "**vacío**"
- Los **corchetes**, los signos ≤ o ≥ y el punto "**lleno**"

Si la inecuación presenta el signo < o >, se denomina inecuación de **sentido estricto**, porque no incluye a sus extremos. Si el signo es ≤ o ≥ se llama inecuación en sentido amplio o **no estricto**, porque sí incluye a sus extremos.

Observación: *si necesitamos cambiar el signo de toda la inecuación estaremos multiplicando por (-1) y por tanto es necesario invertir el sentido de la desigualdad.*

Inecuaciones polinómicas de 1º grado, con una incógnita

Estas inecuaciones, se pueden llegar a escribir de la forma:

$$ax+b>0\ ,\ \ con\ a\neq 0$$
$$(el\ signo\ también\ puede\ ser\ \ <, \leq\ \ ó\ \geq)$$

Método de resolución

Se resuelven de manera semejante a las ecuaciones:

- Eliminar denominadores (se multiplican los dos miembros por el mcm de los denominadores)
- Operar paréntesis (se aplica la propiedad distributiva del producto respecto de la suma)
- Agrupan términos semejantes
- Despejar la incógnita

Ejemplo

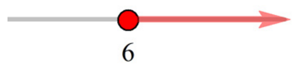
Resolver la inecuación: $(x-1)(x+2)<x^2+3$

$$x^2+2x-x-2<x^2+3$$
$$\boxed{x<5}$$
$$\therefore\ \ S=\{x:x<5\}=(-\infty,5)$$

Ejemplo

Resolver la inecuación: $\dfrac{7}{12}-\dfrac{5(x-2)}{6}\leq\dfrac{1}{4}-\dfrac{3(x-2)}{4}$

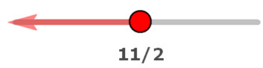
$$mcm(4,6,12)=12$$
$$7-10(x-2)\leq 3-9(x-2)$$
$$7-10x+20\leq 3-9x+18$$
$$-x\leq -6\ \ \to\ \ \boxed{x\geq 6}$$
$$\therefore\ \ S=\{x:x\geq 6\}=[6,+\infty)$$



Ejemplo

Resolver la inecuación: $\dfrac{5(3-x)}{6}-\dfrac{x-4}{2}\geq\dfrac{2x-3}{3}-x$

$$mcm(6,2,3)=6$$
$$5(3-x)-3(x-4)\geq 2(2x-3)-6x$$
$$15-5x-3x+12\geq 4x-6-6x$$
$$-6x\geq -33$$
$$6x\leq 33\ \ \to\ \ \boxed{x\leq 11/2}$$
$$\therefore\ \ S=\{x:x\leq 11/2\}=(-\infty,11/2]$$



Ejemplo

Resolver la inecuación: $x-3(x-1)<-2x+5$

$$x-3x+3<-2x+5$$
$$3<5\ \ (verdadero)$$
$$\therefore\ \ S=\mathbb{R}\ \ (toda\ la\ recta\ real)$$

Ejemplo

Resolver la inecuación: $(x-3)(x+2)-(x^2-x+8)>0$

$$x^2+2x-3x-6-x^2+x-8>0$$
$$-14>0\ \ (falso)$$
$$\therefore\ \ S=\varnothing\to(no\ tiene\ solución)$$

Inecuaciones polinómicas de 2º grado, con una incógnita

Estas inecuaciones, se pueden llegar a escribir de la forma:

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad ; \quad con\ a \neq 0$$

$$(el\ signo\ también\ puede\ ser\ \ <, \leq\ \ ó\ \geq)$$

1º MÉTODO DE RESOLUCIÓN

— Resolvemos la ecuación de 2º grado
— Situamos las soluciones sobre la recta real en orden
— Estudiamos el signo en cada uno de los intervalos
   - Con dos soluciones reales: tendrá el mismo signo que a en los intervalos externos y contrario en el interno
   - Con una solución doble o ninguna solución: tendrá el mismo signo que a en toda la recta.

2º MÉTODO DE RESOLUCIÓN → "VALORES-PRUEBA"

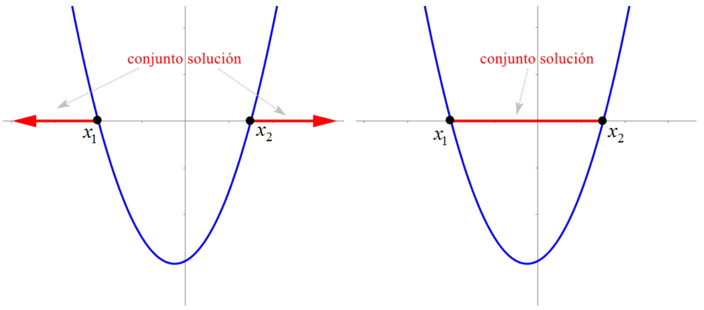
— Resolvemos la ecuación de 2º grado
— Situamos las soluciones sobre la recta real
— Tomamos un "valor x cualquiera adecuado" en cada uno de los intervalos y averiguamos el signo de la expresión en dicho intervalo.

Un intervalo o semirrecta es solución si cualquier número de ese intervalo o semirrecta lo es.

3º MÉTODO DE RESOLUCIÓN → "TABLA DE SIGNOS"

— Descomponiendo en factores: utilizamos el método de la "tabla de signos" que veremos a continuación para inecuaciones polinómicas de grado mayor a 2

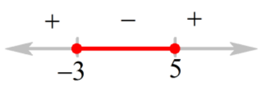
En todos los métodos, la solución de la inecuación cuadrática será el/los intervalos que verifiquen la inecuación dada.



Si $b^2 - 4ac > 0$, *entonces* $ax^2 + bx + c = 0$ *tiene dos raíces reales y la recta queda dividida en 3 intervalos*

Ejemplo

Resolver: $x^2 - 2x - 15 \leq 0$



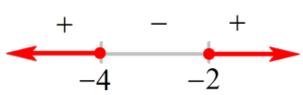
$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+60}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{2}$$

$$x_1 = \frac{2+8}{2} = 5 \quad ; \quad x_2 = \frac{2-8}{2} = -3$$

$$\therefore\ S = [-3, 5] \ ;\ S = \{x / -3 \leq x \leq 5\}$$

Ejemplo

Resolver $x^2 + 6x + 8 \geq 0$



$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-6+2}{2} = -2 ; x_2 = \frac{-6-2}{2} = -4$$

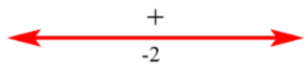
$$\therefore\ S = (-\infty, -4] \cup [-2, +\infty)$$

$$S = \{x / x \leq -4 \vee x \geq -2\}$$

Si $b^2 - 4ac = 0$, *entonces* $ax^2 + bx + c = 0$ *tiene una única raíz real (doble):* $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$

Ejemplo

Resolver: $x^2 + 4x + 4 \geq 0$



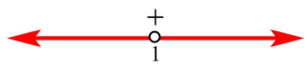
$(x+2)(x+2) \geq 0$

$\therefore\ S = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = \frac{-4 \pm 0}{2} = -2$$

Ejemplo

Resolver: $x^2 - 2x + 1 > 0$



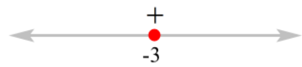
$(x-1)(x-1) > 0$

$\therefore\ S = \mathbb{R} - \{1\}$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \frac{2 \pm 0}{2} = 1$$

Ejemplo

Resolver: $x^2 + 6x + 9 \leq 0$



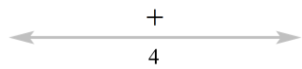
$(x+3)(x+3) \leq 0$

$\therefore\ S = \{-3\} \ ;\ x = -3$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36-36}}{2} = \frac{-6 \pm 0}{2} = -3$$

Ejemplo

Resolver: $x^2 - 8x + 16 < 0$



$(x-4)(x-4) \leq 0$

$\therefore\ S = \varnothing$

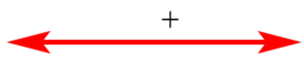
(no existe solución)

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64-64}}{2} = \frac{8 \pm 0}{2} = 4$$

Si $b^2 - 4ac < 0$, *entonces* $ax^2 + bx + c = 0$ *no tiene raíz real alguna, es decir,* $ax^2 + bx + c \neq 0$

Ejemplo

Resolver: $x^2 - 5x + 10 > 0$



$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-40}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{-15}}{2}$$

(sin solución real)

$\therefore\ S = \mathbb{R}$

La cuadrática siempre es positiva y el conjunto solución es $\mathbb{R}$

Ejemplo

Resolver: $-x^2 + 4x - 5 > 0$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

(sin solución real)

$\therefore\ S = \varnothing$ (no existe solución)

La cuadrática nunca es positiva y el conjunto solución es $\varnothing$

Inecuaciones polinómicas factorizables, con una incógnita

Estas inecuaciones, se pueden llegar a escribir de la forma:

$P(x) > 0$; (*el signo también puede ser* $<, \le$ *ó* $\ge$)

El polinomino $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, con $a_n \ne 0$ y grado n, toma valores del mismo signo en cada uno de los intervalos:

$$(-\infty, x_1) \; ; \; (x_1, x_2) \; ; \; (x_2, x_3) \; ; \; \cdots \; ; \; (x_n, \infty)$$

donde $x_1, x_2, \cdots, x_n$ son sus raíces, ordenadas de forma creciente

MÉTODO DE RESOLUCIÓN

- Se pasan todos los términos al primer miembro
- Descomponemos en factores de 1º y 2º grado el polinomio dado
- Estudiamos el signo de cada factor para los valores positivos de x . Esto significa resolver tantas inecuaciones de 1º o 2º grado como factores tengamos, utilizando para resolverlas siempre el signo ≥ 0 (esto se expresa colocando un “ + ” en los intervalos solución de cada inecuación dentro de la “tabla de signos”, y un “ – ” en el resto de intervalos).
- Creamos una “tabla de signos”:
  - Colocamos, en orden creciente, los valores solución de cada inecuación correspondiente a cada factor
  - Escribimos “ + ” donde sí se verifica cada inecuación
  - Escribimos “ – ” en el resto de intervalos
  - Aplicamos la regla de los signos de la multiplicación para averiguar el signo del producto de los factores
- Resaltamos (con trazo grueso, rayado o de otro color) los intervalos en los que se verifica la inecuación propuesta, fijándonos en los signos del producto. Si el signo de la inecuación propuesta es $\le$ *ó* $\ge$ incluiremos los extremos.

Ejemplo

Resolver: $x^3 - x^2 - 6x < 0$

$\rightarrow x(x^2 - x - 6) < 0$

	1	−1	−6
−2		−2	+6
	1	−3	0

$\rightarrow \boxed{x(x+2)(x-3) < 0}$

$\boxed{x \ge 0}$ | $x + 2 \ge 0$; $\boxed{x \ge -2}$ | $x - 3 \ge 0$; $\boxed{x \ge 3}$

$\therefore \; S = (-\infty, -2) \cup (0, 3)$

$S = \{x / x < -2 \; \vee \; 0 < x < 3\}$

Tabla de signos

		−2		0		3	
x	−		−		+		+
$(x+2)$	−		+		+		+
$(x-3)$	−		−		−		+
producto	−		+		−		+
inecuación							

Fijándonos en la inecuación propuesta, los intervalos solución son los negativos

Ejemplo

Resolver: $(4 - x^2)(x+5) \le 0$

$\rightarrow \boxed{(2+x)(2-x)(x+5) \le 0}$

$2 + x \ge 0$; $\boxed{x \ge -2}$ | $2 - x \ge 0$; $-x \ge -2$; $\boxed{x \le 2}$ | $x + 5 \ge 0$; $\boxed{x \ge -5}$

$\therefore \; S = [-5, -2] \cup [2, +\infty)$

$S = \{x / -5 \le x \le -2 \; \vee \; x \ge 2\}$

Observa que resolvemos siempre para los valores positivos ≥ 0

Tabla de signos

		−5		−2		2	
$(2+x)$	−		−		+		+
$(2-x)$	+		+		+		−
$(x+5)$	−		+		+		+
producto	+		−		+		−
inecuación							

Fijándonos en la inecuación propuesta, los intervalos solución son los negativos o iguales a cero

Ejemplo

Resolver:

$(x^2 - 3x + 2)(x^3 - 3x^2)(4 - x^2) \le 0$

1.- Factorizamos toda la expresión

$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$

$(x^3 - 3x^2) = x^2(x-3)$

$(4 - x^2) = -(x-2)(x+2)$

$\boxed{x^2(x-1)(x-2)^2(x+2)(x-3) \ge 0}$

2.- Estudiamos el signo de cada factor

$x - 1 \ge 0$; $\boxed{x \ge 1}$ | $x + 2 \ge 0$; $\boxed{x \ge -2}$ | $x - 3 \ge 0$; $\boxed{x \ge 3}$

$\therefore \; S = [-2, 1] \cup \{2\} \cup [3, +\infty)$

$S = \{x / -2 \le x \le 1 \; \vee \; x = 2 \vee x \ge 3\}$

Tabla de signos

		−2		1		3	
$(x-1)$	−		−		+		+
$(x+2)$	−		+		+		+
$(x-3)$	−		−		−		+
producto	−		+		−		+
inecuación					2		

Fijándonos en la inecuación propuesta, los intervalos solución son los positivos o iguales a cero

Observa que no tenemos en cuenta los factores cuadrados, en la tabla de signos, por ser siempre positivos.

Ejemplo

Resolver:

$(x + 14)(8 - x)(5 + x) > 0$

$x + 14 \ge 0$; $\boxed{x \ge -14}$ | $8 - x \ge 0$; $-x \ge -8$; $\boxed{x \le 8}$ | $5 + x \ge 0$; $\boxed{x \ge -5}$

$\therefore \; S = (-\infty, -14) \cup (-5, 8)$

$S = \{x / x < -14 \; \vee \; -5 < x < 8\}$

Tabla de signos

		−14		−5		8	
$(x+14)$	−		+		+		+
$(8-x)$	+		+		+		−
$(5+x)$	−		−		+		+
producto	+		−		+		−
inecuación							

Ejemplo

Resolver:

$(1 - x^2)(x^2 - 9) \le 0$

$(1 + x)(1 - x)(x + 3)(x - 3) \le 0$

$1 + x \ge 0$; $\boxed{x \ge -1}$ | $1 - x \ge 0$; $-x \ge -1$; $\boxed{x \le 1}$ | $x + 3 \ge 0$; $\boxed{x \ge -3}$ | $x - 3 \ge 0$; $\boxed{x \ge 3}$

Tabla de signos

		−3		−1		1		3	
$1+x$	−		−		+		+		+
$1-x$	+		+		+		−		−
$x+3$	−		+		+		+		+
$x-3$	−		−		−		−		+
producto	−		+		−		+		−
Inecuación									

$\therefore \; S = (-\infty, -3] \cup [-1, 1] \cup [3, +\infty)$

$S = \{x / x \le -3 \; \vee \; -1 \le x \le 1 \; \vee \; x \ge 3\}$

En lugar de la tabla de signos podemos aplicar esta propiedad:

Un intervalo o semirrecta es solución si cualquier número de ese intervalo o semirrecta lo es (MÉTODO POR VALORES-PRUEBA).

En ocasiones, puede resultar un método más rápido.

Inecuaciones racionales, con una incógnita

Estas inecuaciones, se pueden llegar a escribir de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \quad ; \quad (\textit{el signo también puede ser } <, \le \text{ ó } \ge)$$

Donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios

El método de resolución es semejante al descrito para inecuaciones polinómicas de grado mayor a 2 con las siguientes observaciones:

MÉTODO DE RESOLUCIÓN

- Se pasan todos los términos al primer miembro
- Realizamos las operaciones que aparecen SIN eliminar los denominadores, obteniendo una sola fracción algebraica
- Descomponemos en factores de 1º y 2º grado tanto el numerador como el denominador
- Estudiamos el signo de cada factor para los valores positivos de x. Esto significa resolver tantas inecuaciones de 1º o 2º grado como factores tengamos, utilizando siempre el signo ≥ 0 para los factores del numerador y el signo > 0 para los factores del denominador
- Creamos una "tabla de signos" de manera que podamos estudiar el signo del cociente
- Resaltamos (con trazo grueso, rayado o de otro color) los intervalos en los que se verifica la inecuación propuesta, fijándonos en los signos del cociente. Si el signo de la inecuación propuesta es $\le$ *ó* $\ge$ incluiremos los extremos que corresponden solo al numerador.

Ejemplo

Resolver: $\dfrac{3}{2}+\dfrac{x}{x-1} > -\dfrac{2}{x-1}$

$$\frac{3}{2}+\frac{x}{x-1}+\frac{2}{x-1} > 0$$

$$\frac{3(x-1)+2x+4}{2(x-1)} > 0$$

$$\frac{3x-3+2x+4}{2(x-1)} > 0$$

$$\boxed{\frac{5x+1}{2(x-1)} > 0}$$

$\overbrace{5x+1 \ge 0}^{N\ge 0}$: $5x \ge -1$, $\boxed{x \ge -1/5}$ | $\overbrace{x-1>0}^{D>0}$: $\boxed{x>1}$

$$\therefore\ S=\left(-\infty,-\frac{1}{5}\right) \cup (1,+\infty)$$

Tabla de signos

	$-\frac{1}{5}$	1	
$(5x+1)$	−	+	+
$(x-1)$	−	−	+
cociente	+	−	+
inecuación			

Fijándonos en la inecuación propuesta, los intervalos solución son los positivos

$$(x-1) \ne 0 \ \rightarrow\ x \ne 1$$

Observa que el signo que utilizamos para resolver las inecuaciones del denominador siempre es >0 (debemos descartar los valores que anulan el denominador).

Ejemplo

Resolver: $\dfrac{1}{x} \le 1 \ \rightarrow\ \dfrac{1-x}{x} \le 0$

$\overbrace{1-x \ge 0}^{N\ge 0}$: $\boxed{x \le 1}$ | $\overbrace{\boxed{x>0}}^{D>0}$

$$\therefore\ S=(-\infty,0) \cup [1,+\infty)$$

	0	1	
$(1-x)$	+	+	−
x	−	+	+
cociente	−	+	−
inecuación			

Ejemplo

Resolver $\dfrac{(x-2)(x+1)}{(x-4)} \le 0$

Nota: $(x-4) \ne 0 \rightarrow x \ne 4$

$\overbrace{x-2 \ge 0 \ \vert\ x+1 \ge 0}^{N\ge 0}$: $\boxed{x \ge 2}$, $\boxed{x \ge -1}$ | $\overbrace{x-4>0}^{D>0}$: $\boxed{x>4}$

$$\therefore\ S=(-\infty,-1] \cup [2,4)$$

Tabla de signos

	−1	2	4	
$(x-2)$	−	−	+	+
$(x+1)$	−	+	+	+
$(x-4)$	−	−	−	+
cociente	−	+	−	+
inecuación				

Fijándonos en el signo de la inecuación propuesta, los intervalos solución son los negativos o iguales a cero

Ejemplo

Resolver la inecuación $\dfrac{3x^3-7x^2-22x+8}{-5x^4-3x^3+47x^2+27x-18} \le 0$

1.- Factorizamos numerador y denominador por Ruffini

$$\frac{(3x-1)(x+2)(x-4)}{(x+3)(x-3)(2-5x)(x+1)} \le 0$$

2.- Estudiamos el signo de cada uno de los factores:

$N \ge 0$:
- $3x-1 \ge 0$; $3x \ge 1$; $\boxed{x \ge \frac{1}{3}}$
- $x+2 \ge 0$; $\boxed{x \ge -2}$
- $x-4 \ge 0$; $\boxed{x \ge 4}$

$D > 0$:
- $x+3>0$; $\boxed{x>-3}$
- $x-3>0$; $\boxed{x>3}$
- $2-5x>0$; $-5x>-2$; $5x<2$; $\boxed{x<\frac{2}{5}}$
- $x+1>0$; $\boxed{x>-1}$

3.- Construimos la tabla de signos

4.- Señalamos la solución de la inecuación

$$\therefore\ S=(-3,-2] \cup \left(-1,\frac{1}{3}\right] \cup \left(\frac{2}{5},3\right) \cup [4,\infty)$$

Fijándonos en el signo de la inecuación propuesta, los intervalos solución son los negativos o iguales a cero.

Tabla de signos

	−3	−2	−1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	3	4	
$3x-1$	−	−	−	−	+	+	+	+
$x+2$	−	−	+	+	+	+	+	+
$x-4$	−	−	−	−	−	−	−	+
$x+3$	−	+	+	+	+	+	+	+
$x-3$	−	−	−	−	−	−	+	+
$2-5x$	+	+	+	+	+	−	−	−
$x+1$	−	−	−	+	+	+	+	+
cociente	+	−	+	−	+	−	+	−
inecuación								

En lugar de la tabla de signos podemos aplicar esta propiedad:
Un intervalo o semirrecta es solución si cualquier número de ese intervalo o semirrecta lo es (MÉTODO POR VALORES-PRUEBA).
En ocasiones, puede resultar un método más rápido.